КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, 2023, том 68, № 3, с. 401–406

ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ИОНИЗИРУЮЩИХ ИЗЛУЧЕНИЙ

УДК 53(01); 539.26:539.3:548.7

КОВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СРЕДЕ С ИСТОЧНИКАМИ

А. А. Дышеков[1,*], Ю. П. Хапачев[1,]**

[1]*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия*

**E-mail: dyshekov@yandex.ru*

***E-mail: khapachev@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2023 г.
После доработки 10.01.2023 г.
Принята к публикации 18.01.2023 г.

Рассмотрен геометрический подход к описанию электромагнитного поля в среде с источниками как единого полевого объекта. Описание основывается на ковариантном бескоординатном подходе, принятом в современных геометризованных полевых теориях. Уравнения Максвелла в среде с источниками представлены в терминах дифференциальных 2-форм для электрического и магнитного полей в четырехмерном пространственно-временном континууме. Общие уравнения включают в себя различные частные случаи распространения, рассеяния и излучения электромагнитного поля в средах с разнообразными свойствами.

DOI: 10.31857/S0023476123700108, **EDN:** XABKIL

ВВЕДЕНИЕ

Отличие электромагнитного поля в вакууме от поля в среде обусловлено наличием в последней микроскопических зарядов и магнитных моментов и взаимодействием с ними поля. Это взаимодействие включает в себя рассеяние и переизлучение. Микроскопические поля описываются уравнениями Максвелла–Лоренца, которые разбиваются на две пары.

Первая пара:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_0},\\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

вторая пара:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_0},\\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь введены пространственно-временные переменные $x = (x_0, \mathbf{x})$.

Уравнения (1), (2) описывают макроскопические поля, усредненные по физически бесконечно малой 4-области пространства–времени. Такой подход основан на принципах классической макроскопической электродинамики Лоренца. Уравнения (1), (2) в общем случае включают в себя как поля без источников (волны), так и поля, порождаемые источниками – плотностями зарядов ρ и токов $\mathbf{j}$, объединяемыми в 4-вектор тока $J = (c\rho, \mathbf{j})$. При этом усредненные микроскопические плотности зарядов ρ и токов $\mathbf{j}$

$$\langle J \rangle = J + J_0 = (\rho, \mathbf{j}) + (\rho_0, \mathbf{j}_0)$$

включают в себя члены, имеющие различный физический смысл. А именно, 4-ток $J = (c\rho, \mathbf{j})$ отражает реакцию среды на электромагнитное поле, связанную с пространственным перераспределением зарядов и их движением. Или, иначе, 4-ток J индуцирован полем. С другой стороны, 4-ток $J_0 = (c\rho_0, \mathbf{j}_0)$ связан с внешними источниками (например, с внешними зарядами и токами).

Физический смысл разделения уравнений Максвелла (1), (2) на пары следующий. Уравнения из первой пары являются однородными. Тем самым они определяют свойства поля, не связанные с источниками. Напротив, вторая пара уравнений Максвелла содержит источники электромагнитного поля – плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{j}$, заданные как функции пространственных координат и времени.

Фундаментальное значение разделения уравнений Максвелла на пары обнаруживается при объединении полей в кососимметрический тензор поля второго ранга в псевдоевклидовой метрике Минковского [1, 2]. В этом случае первая пара записывается как равенство нулю внешнего дифференциала тензора поля [3–5]. Как известно, операция внешнего дифференцирования не связана с наличием метрики [6]. В то же время вторая пара для своего написания уже требует наличия метрики. Это связано с применением оператора Ходжа из пространства дифференциальных форм, который отображает кососимметричный тензор типа $(0, k)$ на тензор типа $(0, n-k)$, где n – размерность пространства, k – ранг ковариантного кососимметричного тензора [7].

Отметим, что электромагнитное поле как физический объект характеризуется величинами напряженностей электрического и магнитного полей, поскольку именно они непосредственно измеряются в эксперименте по механическому влиянию на заряды и токи. Иными словами, любое описание электромагнитных явлений в рамках классической электродинамики, претендующее на прямое соответствие с экспериментом, должно опираться на величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Это замечание сделано в связи с ролью электромагнитных потенциалов в современной классической, а особенно квантовой, электродинамике для анализа задач излучения и рассеяния, связанных с решением неоднородных уравнений Максвелла [8]. Напомним, что первоначально потенциалы (в релятивистском случае они объединяются в один 4-потенциал, или 1-форму) были введены в теорию как математический прием, облегчающий решение конкретных задач. Впоследствии скалярному потенциалу был придан смысл энергетической характеристики в частном случае электростатического поля. Векторному потенциалу "повезло" меньше, его физический смысл в классической теории не обнаруживается.

Использование потенциалов порождает проблему калибровки. Поскольку потенциалы определяются неоднозначно, на них можно наложить те или иные дополнительные условия (калибровки), выбираемые согласно специфике рассматриваемой задачи. При этом полученные решения могут оказаться не удовлетворительными по отношению к общим принципам симметрии. Например, кулоновская калибровка нарушает лоренц-инвариантность.

В связи с этим, исходя из принципа Оккама (сокращения "сущностей"), можно поставить задачу ковариантного (релятивистского) описания электромагнитного поля, включая процессы рассеяния и излучения, как единого первичного объекта без обращения к понятию потенциалов.

МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

Система (1), (2) для макрополей не полна, и должна быть дополнена зависимостью 4-тока в среде от электромагнитного поля:

$$J = J(\mathbf{E}, \mathbf{B}). \tag{3}$$

Конкретный вид этого уравнения определяется свойствами и структурой среды и устанавливается вне рамок электродинамики. Для этого необходимо моделирование свойств среды. Из закона сохранения заряда следует условие равенства нулю 4-дивергенции тока:

$$\nabla \cdot J = 0. \tag{4}$$

Это условие играет роль связи, в результате которой из четырех уравнений (3) независимыми оказываются только три. Такое свойство имеет глубокий физический смысл и является следствием теоремы Нетер о связи симметрии пространства–времени с сохранением тока [7].

С помощью первого уравнения (1) можно найти зависимость $\mathbf{B}(\mathbf{E})$. Тогда уравнение (3) упрощается:

$$J = J(\mathbf{E}). \tag{5}$$

В итоге вторая пара уравнений Максвелла (2) приобретает вид

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_0' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_0}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0. \end{gathered} \tag{6}$$

Реакция среды на поле описывается посредством индукции электрического поля $\mathbf{D}$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$. Если поляризация среды разделяется на электрическую и магнитную составляющие, то материальные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}). \end{gathered} \tag{7}$$

Обратим внимание, что последнее равенство записано как обратная функция, поскольку в отличие от первого соотношения связывает магнитную индукцию $\mathbf{B}$ (источник поля) с напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$ (реакцией среды). Материальные уравнения (7) также могут записываться с помощью векторов электрической поляризации $\mathbf{P}$ и магнитной поляризации $\mathbf{M}$ среды:

$$\begin{gathered} \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{E}), \\ \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{H}). \end{gathered} \tag{8}$$

Отсюда следует связь между поляризацией среды и индуцированными полем плотностями заряда ρ и тока $\mathbf{j}$:

$$\begin{gathered} \rho = -\operatorname{div}\mathbf{P}, \\ \frac{\mathbf{j}}{c} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_0} + \operatorname{rot}\mathbf{M}. \end{gathered} \tag{9}$$

Функциональные соотношения (7) для линейной среды представляют собой в общем случае линейную связь вида

$$\begin{gathered} \mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \hat{\mu}\mathbf{H}. \end{gathered} \tag{10}$$

Линейные интегральные операторы диэлектрической $\hat{\varepsilon}$ и магнитной $\hat{\mu}$ проницаемостей феноменологически строятся с учетом пространственной и временной дисперсии, а также анизотропии среды, исходя из релятивистского принципа причинности:

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{D}(x_0, \mathbf{x}) = \\ = \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_{x_0>|\mathbf{x}|} d\mathbf{x}'\varepsilon(x_0, x'_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{E}(x'_0, \mathbf{x}'), \quad (11)$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}(x_0, \mathbf{x}) = \\ = \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_{x_0>|\mathbf{x}|} d\mathbf{x}'\mu(x_0, x'_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{H}(x'_0, \mathbf{x}'). \quad (12)$$

Ядра ε и μ представляют собой тензоры второго ранга, что в общем случае учитывает анизотропные свойства среды. Интегрирование проводится по всему интервалу времени $x'_0 < x_0$ и по световому конусу абсолютного прошлого. Это отражает требование, чтобы отклик среды определялся только полями в прошлом и настоящем, а также возможность распространения сигнала для времени подобного интервала. Последнее ограничение, однако, в абсолютном большинстве случаев выполняется автоматически, поскольку время действия внешнего возмущения обычно таково, что $x_0 \gg |\mathbf{x}|$. Поэтому можно распространить область интегрирования во внутреннем интеграле, как это обычно делается, на все пространство.

Отметим, что учет релятивистской причинности не относится к невероятным случаям. Простые оценки показывают, что при длительности импульса $\sim 10^{-12}$ с область распространения сигнала имеет порядок 10^{-4} м $= 10^2$ мкм. Если линейные размеры области пространственной дисперсии превышают эту величину, то необходим учет релятивистской причинности. Например, пикосекундный импульс жесткого рентгеновского излучения (технические подробности оставляем экспериментаторам) распространится в среде (в частности, в кристалле) не более чем на 300 мкм. Если области пространственной неоднородности (эпитаксиальные слои, дефекты т.д.) не превышают эту величину, то релятивистский принцип причинности совершенно необходим. В дальнейшем не будем рассматривать такую возможность и ограничимся общепринятым приближением.

В (11) и (12) должно выполняться условие предельного перехода для вакуума, когда $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. В этом случае ядра ε и μ переходят в дельта-функции, т.е. имеют сингулярный характер. Поэтому соотношения (11) и(12) предпочтительнее записывать в виде, исключающем сингулярность ядер интегральных операторов:

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{E}(x_0, \mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \times \\ \times \int_{x_0>|\mathbf{x}|} d\mathbf{x}'\chi_e(x_0, x'_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{E}(x'_0, \mathbf{x}') = \\ = \mathbf{E}(x_0, \mathbf{x}) + \hat{\chi}_e\mathbf{E}(x_0, \mathbf{x}), \quad (13)$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{H}(x_0, \mathbf{x}) + \\ + \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_{x_0>|\mathbf{x}|} d\mathbf{x}'\chi_m(x_0, x'_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}')\mathbf{H}(x'_0, \mathbf{x}') = \\ = \mathbf{H}(x_0, \mathbf{x}) + \hat{\chi}_m\mathbf{H}(x_0, \mathbf{x}), \quad (14)$$

где χ_e и χ_m – ядра интегральных операторов, соответствующие электрической и магнитной поляризуемостям среды. Далее будем использовать материальные уравнения именно в таком виде.

Обычные материальные уравнения имеют характер локальной линейной связи между индукциями и соответствующими полями. В частности, для прозрачных оптически неактивных сред операторы $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ переходят в скалярные величины в случае изотропных сред и в тензоры второго ранга в случае анизотропных сред [9].

Используя (13) и (14), можно записать уравнения Максвелла в следующем виде:

первая пара:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_0} = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_0} - \frac{\partial(\hat{\chi}_m\mathbf{H})}{\partial x_0} = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_0} - 4\pi\mathbf{j}_m, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}\mathbf{H} + \operatorname{div}(\hat{\chi}_m\mathbf{H}) = \operatorname{div}\mathbf{H} - 4\pi\rho_m = 0, \quad (15)$$

вторая пара:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_0} + \frac{\partial(\hat{\chi}_e\mathbf{E})}{\partial x_0} + 4\pi\mathbf{j}'_0 = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_0} + 4\pi\mathbf{j}, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_0 - \operatorname{div}(\hat{\chi}_e\mathbf{E}) = 4\pi\rho. \quad (16)$$

Введем, исходя из вида (15) и (16), величины

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\hat{\chi}_e\mathbf{E})}{\partial x_0} + \mathbf{j}'_0 = \mathbf{J}_e + \mathbf{j}'_0, \\ J_{e0} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\hat{\chi}_e\mathbf{E}), \\ \mathbf{J}_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\hat{\chi}_m\mathbf{H})}{\partial x_0}, \\ J_{m0} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\hat{\chi}_m\mathbf{H}), \quad (17)$$

образующие попарно 4-векторы “электрического” и “магнитного” токов:

$$J = J_{00} + J_e = (\rho_0, \mathbf{j}'_0) + (J_{e0}, \mathbf{J}_e) = (J_0, \mathbf{J}), \\ J_m = (J_{m0}, \mathbf{J}_m), \\ J_e = \frac{1}{4\pi}\left(-\operatorname{div}(\hat{\chi}_e\mathbf{E})e^0 + \frac{\partial(\hat{\chi}_e\mathbf{E})}{\partial x_0}\right), \\ J_m = \frac{1}{4\pi}\left(-\operatorname{div}(\hat{\chi}_m\mathbf{H})e^0 + \frac{\partial(\hat{\chi}_m\mathbf{H})}{\partial x_0}\right). \quad (18)$$

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим частный случай электромагнитного поля в вакууме. Будем исходить из ковариантного тензора поля, заданного в некотором базисе e^j ($j = 0, 1, 2, 3$) пространства Минковского, снабженного декартовыми координатами $x = (x_0, \mathbf{x})$:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

где E_j, H_j – компоненты 4-векторов поля $E = (0, \mathbf{E})^{\text{т}}$, $H = (0, \mathbf{H})^{\text{т}}$.

Тензор поля может быть представлен в виде разложения по кососимметричному базису:

$$\begin{gathered}\mathbf{F} = F_{ij}(e^i \wedge e^j) = F_{0j}(e^0 \wedge e^j) + F_{1j}(e^1 \wedge e^j) = \\ = e^0 \wedge E - H_3(e^1 \wedge e^2) + H_2(e^1 \wedge e^3) - \\ - H_1(e^2 \wedge e^3).\end{gathered} \qquad (20)$$

Здесь символом $\wedge$ обозначено внешнее (тензорное) кососимметричное умножение 4-векторов:

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a = ab - ba.$$

Введем в рассмотрение оператор (звезду) Ходжа. Строгое определение оператора Ходжа вводится в теории дифференциальных форм [7] и в полном виде здесь не понадобится. Для целей настоящей работы достаточно определить действие оператора Ходжа на тензор поля $\mathbf{F}$, т.е. кососимметричную 2-форму в псевдоевклидовой метрике, согласно следующему правилу:

$$*\mathbf{F} = (e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) \cdot\cdot \mathbf{F} = \varepsilon_{ijkl} F_{kl}. \qquad (21)$$

Здесь ε_{ijkl} – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга; кроме того, использовано двойное скалярное произведение диад (ab) и (cd):

$$(ab) \cdot\cdot (cd) = (b \cdot c)(a \cdot d).$$

Тензор $*\mathbf{F}$ называется дуальным по отношению к $\mathbf{F}$. Оператор Ходжа линеен, а также для псевдоевклидовой метрики обладает свойством антисамодуальности $** = -1$, с помощью которого можно определить обратный оператор $*^{-1} = -*$. Пользуясь этим определением, можно составить следующую таблицу для базисных кососимметричных 2-форм:

$$\begin{gathered} *(e^0 \wedge e^1) = -e^2 \wedge e^3; \quad *(e^0 \wedge e^2) = e^1 \wedge e^3; \\ *(e^0 \wedge e^3) = -e^1 \wedge e^2; \quad *(e^1 \wedge e^2) = e^0 \wedge e^3; \\ *(e^1 \wedge e^3) = -e^0 \wedge e^2; \quad *(e^2 \wedge e^3) = e^0 \wedge e^1. \end{gathered} \qquad (22)$$

Рассмотрим действие оператора Ходжа на 4-тензор вида $e^0 \wedge a$:

$$\begin{gathered} *(e^0 \wedge a) = *(e^0 \wedge a_\mu e^\mu) = \\ = -(e^2 \wedge e^3)a_1 + (e^1 \wedge e^3)a_2 - (e^1 \wedge e^2)a_3. \end{gathered} \qquad (23)$$

Действуя оператором Ходжа на разложение (20), с учетом (22) и (23) получим следующее выражение для дуального тензора $*\mathbf{F}$:

$$\begin{gathered} *\mathbf{F} = (*F)_{ij}(e^i \wedge e^j) = (*F_{0j})(e^0 \wedge e^j) + \\ + (*F)_{1j}(e^1 \wedge e^j) = -e^0 \wedge H + (*(e^0 \wedge E)). \end{gathered} \qquad (24)$$

Вид формул (20) и (24) показывает, что преобразование дуальности, осуществляемое оператором Ходжа, меняет местами электрическое и магнитное поля по правилу: $\mathbf{E} \leftrightarrow -\mathbf{H}$.

Рассмотрим еще одну важнейшую операцию в теории внешних форм – внешний дифференциал формы как линейное отображение множества r-форм во множество $(r + 1)$-форм [4, 7]. Внешний дифференциал представляет собой антисимметричное дифференцирование, обобщающее операцию взятия ротора от вектора на случай пространства произвольного числа измерений. Повторное применение оператора d дает нуль: $d(d\mathbf{A}) = 0$. Для 2-формы вида

$$\mathbf{A} = e^i \wedge e^j A_{ij}$$

внешний дифференциал равен

$$d\mathbf{A} = e^i \wedge e^j \wedge e^k \partial_i A_{jk}. \qquad (25)$$

Если подействовать внешним дифференциалом на тензор поля $\mathbf{F}$ (20), то, согласно (25), получим

$$d\mathbf{F} = e^i \wedge e^j \wedge e^k \partial_i F_{jk} = 0, \qquad (26)$$

поскольку, согласно первой паре уравнений Максвелла (1) с учетом $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, коэффициенты 3-формы (26) обращаются в нуль.

Теперь, если подействовать внешним дифференциалом на дуальный тензор поля $*\mathbf{F}$ (24), то аналогичные вычисления приводят к уравнению

$$d(*\mathbf{F}) = \varepsilon \cdot J = \varepsilon_{ijkl} J_l. \qquad (27)$$

Здесь $J = (J_0, \mathbf{J})$ – 4-вектор тока. В отсутствие источников уравнение (27) переходит в

$$d(*\mathbf{F}) = 0. \qquad (28)$$

Поскольку операция внешнего дифференцирования инвариантна, уравнения (26) и (27) представляют собой бескоординатную запись уравнений Максвелла в произвольном многообразии при произвольном выборе координат. Такая форма уравнений Максвелла используется в общей теории относительности.

На первый взгляд уравнения Максвелла в форме (26), (27) могут быть использованы и в более простом случае метрики Минковского. Однако анализ уравнений (26) и (27) показывает, что это не так. Действительно, внешний дифференциал по определению повышает ранг формы на единицу, что приводит к дифференциальным соотношениям для 3-форм. При этом источники поля проявляются не непосредственно, а через свертку с антисимметричным тензором четвертого ранга, образуя, как того и требует условие ковариантности уравнений, 3-форму. Разумеется, решать такие неоднородные уравнения затруднительно. Неслучайно в общей теории относительности, как правило, рассматривается однородная система (26) и (28).

Существует, однако, альтернативный способ ковариантного описания электромагнитного поля. Для этого понадобится еще один инвариантный оператор. Это дифференциальный оператор кограницы δ, понижающий степень формы на единицу [7]. Оператор δ можно интерпретировать как ковариантную дивергенцию антисимметричного тензора. Для рассматриваемого случая 2-формы в метрике Минковского оператор кограницы переходит в обычную 4-дивергенцию:

$$\delta = *^{-1}d* = \nabla\cdot$$

Для получения альтернативного вида уравнений Максвелла необходимо подействовать оператором кограницы на тензор поля (20) и дуальный ему тензор (24). Используя формулу для дивергенции диады

$$\nabla\cdot(ab) = (\nabla\cdot a)b + a(\nabla b),$$

получим следующую систему уравнений Максвелла в релятивистской форме:

$$\nabla\cdot(*\mathbf{F}) = \nabla\cdot(-e^0\wedge H + *(e^0\wedge E)) = 0, \tag{29}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot(e^0\wedge E + *(e^0\wedge H)) = -4\pi J. \tag{30}$$

Эти соотношения, также как и (26), (27), являются ковариантным представлением полевых уравнений с источниками. Разумеется, системы (26), (27) и (29), (30) описывают одно и то же электромагнитное поле с источниками и в этом смысле эквивалентны. Однако между этими способами описания имеется существенное различие. Оно заключается в том, что оператор кограницы понижает степень формы на единицу и в результате источником поля оказывается непосредственно 4-вектор тока. Если исходить из (29) и (30), то решение неоднородной системы будет выражаться через свертку 4-тока J с тензором Грина второго ранга, содержащим $2^4 = 16$ компонент; в то же время аналогичное решение (26), (27) будет выражаться через свертку 3-формы $\varepsilon\cdot J$ с тензором Грина четвертого ранга с $4^4 = 256$ компонентами.

Система (26), (27) описывает поле с источниками посредством единого объекта – тензора поля **F**, содержащего с учетом антисимметрии шесть независимых компонент. Решение этой системы обычно ищется для компонент 4-потенциала (с точки зрения геометрии они представляют собой локальные формы связности) A, удовлетворяющих условию $\mathbf{F} = dA$, т.е.:

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$

Тогда уравнение (26) удовлетворяется тождественно в силу свойства внешнего дифференциала $d(da) = 0$. Именно это обстоятельство обусловливает введение 4-потенциала как удобного инструмента теории. Далее поля **E** и **H** определяются по компонентам 4-потенциала по известным формулам. Как видно, 4-потенциал при реализации такой программы представляет собой лишь промежуточное звено, обеспечивающее упрощение поиска решения. В то же время система (29), (30) записана непосредственно для 4-векторов поля E и H и порождающего их источника J.

Перейдем к общему случаю поля в среде. В рамках ковариантного четырехмерного формализма тензор поля теперь будет определяться 4-векторами напряженности $E = (0, \mathbf{E})$ электрического поля в вакууме и напряженности магнитного поля $H = (0, \mathbf{H})$ в среде. Такая непривычная форма тензора поля связана с тем, что, согласно (7), материальное уравнение для магнитного поля записывается как обратное соотношение.

Заметим, что соотношения (18) для 4-токов могут быть записаны в ковариантном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} J_e &= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot(e^0\wedge(\hat{\chi}_e E)), \\ J_m &= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot(e^0\wedge(\hat{\chi}_m H)). \end{aligned} \tag{31}$$

Тогда уравнения Максвелла в среде с учетом (15), (16) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(*\mathbf{F}) &= \nabla\cdot\left(-e^0\wedge H + *(e^0\wedge E)\right) = 4\pi J_m, \\ \nabla\cdot\mathbf{F} &= \nabla\cdot\left(e^0\wedge E + *(e^0\wedge H)\right) = -4\pi J. \end{aligned} \tag{32}$$

Соотношения (32) решают поставленную задачу нахождения обобщенного ковариантного представления уравнений электромагнитного поля в различных средах.

Фундаментальные соотношения (32) имеют симметричный вид и связывают поля и токи в общем случае линейной среды. При этом, помимо общефизического требования выполнения принципа причинности, они не имеют ограничений на характер взаимодействия поля со средой. Уравнения (32) показывают, что, как и следовало ожидать, поля в среде определяются не только “электрическим” J, но и “магнитным” J_m токами. Конечно, это утверждение носит в значительной степени формальный характер, поскольку истинным током является величина J_0.

Уравнения (32) позволяют ставить на единой основе разнообразные задачи взаимодействия поля и вещества. Перечислим частные случаи.

Если рассматривается поле в вакууме без источников, то система (32) становится однородной системой волнового типа. Соответственно, решения могут быть представлены через волны различных типов, в первую очередь через плоские волны.

В случае, если заданы внешние источники (ток J_0) в вакууме, то неоднородная система (32) рассматривается как основа задачи излучения с возможностью применения известных подходов, в частности приближения Борна.

Пусть заданы характеристики среды $\hat{\chi}_e$ и $\hat{\chi}_m$ при условии отсутствия внешних токов. Тогда уравнения (32) с учетом (31) представляют собой определенные функциональные соотношения для полей. Характер этих соотношений определяется типом материальных уравнений (локальная или нелокальная связь, однородность по времени и пространству, анизотропия) и приводит к различным математическим формам: скалярные либо тензорные, дифференциальные или интегральные уравнения. Однако в любом случае эти соотношения, как следует из (17), будут однородными. К кругу таких задач относятся классические проблемы рассеяния в среде, включая дифракцию.

Наконец, рассмотрим общий случай, когда в среде присутствуют внешние источники. Тогда упомянутые выше функциональные соотношения становятся неоднородными. Такой случай включает в себя задачи излучения от заданных источников в среде.

Наиболее очевидным подходом к решению уравнений (32) является переход в обратное пространство с помощью 4-преобразования Фурье. Эта процедура приводит, в частности, для однородных задач к дисперсионным соотношениям для волновых векторов поля и нетривиальным условиям разрешимости для фурье-компонент полей. В итоге при таком подходе оказывается возможным нахождение явного вида полей для различных модельных задач, включая рассеяние в средах с пространственной дисперсией. Эти проблемы выходят за рамки настоящей работы и могут стать предметом дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный формализм предполагает рассмотрение электромагнитного поля в среде с источниками как единого объекта, описываемого полной системой уравнений Максвелла в ковариантном виде, и обеспечивается представлением полей через дифференциальные 2-формы. Применение геометрического формализма позволяет не только релятивистски ковариантно описывать поле и источники, но и представлять всевозможные процессы распространения, рассеяния и излучения полей в рамках единого подхода. При этом важно, что решение задачи определения поля осуществляется непосредственно, минуя обращение к потенциалам, которое неизбежно порождает проблему калибровки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Parrott S.* Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry. New York; Berlin; Heidelberg; London; Paris; Tokyo: Springer-Verlag, 1987. 308 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4684-8
2. *Sattinger D.H.* Maxwell’s Equations, Hodge Theory, and Gravitation. http://arxiv.org/abs/1305.6874v2. General Physics (physics.gen-ph) 3 Nov 2013. 22 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.6874
3. *Schleifer N.* // Am. J. Phys. 1983. V. 51. P. 1139. https://doi.org/10.1119/1.13325
4. *Lindell I.V.* Differential Forms in Electromagnetics. John Wiley & Sons. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, 2004. V. 22. 272 p. https://doi.org/10.1002/0471723096.ch3
5. *Warnick K.F., Russer P.* // Prog. Electromagn. Res. 2014. V. 148. P. 83. https://doi.org/10.2528/PIER14063009
6. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1986. 760 с.
7. *Катанаев М.Н.* Геометрические методы в математической физике. arXiv:1311.0733v3 [math-ph] 20 Nov 2016. 1588 с.
8. *Ахиезер А.И., Берестецкий Б.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981. 428 с.
9. *Федоров Ф.И.* Оптика анизотропных сред. М.: Едиториал УРСС, 2004. 384 с.