

УДК 535.135, 137

ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНЫ *ТЕ*- И *ТМ*-ТИПОВ В ПЛЕНКЕ МЕТАЛЛА, ГРАНИЧАЩЕЙ СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ. II. АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНОВ

© 2024 г. А. Н. Даринский^{1,*}¹Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова Курчатовского комплекса кристаллографии
и фотоники НИЦ “Курчатовский институт”, Москва, Россия

*E-mail: Alexandre_Dar@mail.ru

Поступила в редакцию 09.09.2024 г.

После доработки 09.09.2024 г.

Принята к публикации 16.09.2024 г.

Установлено максимально возможное число *ТЕ*- и *ТМ*-поляризованных поверхностных плазмон-поляритонов в запрещенной зоне блоховского спектра электромагнитных волн периодической сверхрешетки в структурах, содержащих пленку металла между однородной средой и периодической сверхрешеткой или между двумя сверхрешетками. Показано, что ключевую роль в определении максимального числа таких волн играет характер частотной зависимости импеданса сверхрешетки. Кроме того, максимальное число решений поверхностных плазмон-поляритонов зависит от типа структуры и поляризации волны.

DOI: 10.31857/S0023476124060136, EDN: YGQEMW

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется значительное число работ по теории поверхностных плазмон-поляритонов (ППП), результаты которых достаточно подробно изложены в монографиях [1–7]. При этом дисперсионные уравнения выводились в явном виде и решались для конкретных материалов. Иной подход, не использующий дисперсионные уравнения в явном виде, был развит в [8, 9], где анализировалось существование PPP на границе полубесконечного металла и сверхрешетки (СР), образованной из диэлектриков произвольной анизотропии, а также в пленке металла, находящейся между однородными диэлектриками произвольной анизотропии.

В данной работе рассматриваются PPP *ТЕ*- и *ТМ*-типов в пленке металла, помещенной между диэлектрической периодической СР и полубесконечным однородным диэлектриком или между двумя СР. В части I [10] дисперсионные уравнения PPP были получены в виде

$$\det \hat{\mathbf{Z}}_{st}^{(g)} = 0, \quad g = TE, TM, \quad (1)$$

где $\hat{\mathbf{Z}}_{st}^{(g)}$ — 2×2 действительная симметричная матрица. В [10] установлен ряд общих свойств собственных значений $\lambda_{1,2}^{(g)}$ матриц $\hat{\mathbf{Z}}_{st}^{(g)}$. Кроме того, в [10] обсуждались частотные зависимости импедансов полубесконечных СР с асимметричным

периодом $Z_A^{(g)}$ и $Z_B^{(g)}$, с симметричным периодом $Z_s^{(g)}$ и частотная зависимость импеданса полубесконечной однородной среды $Z_h^{(g)}$. Напомним, что в симметричном варианте слои расположены симметрично относительно середины периода, а в асимметричном — произвольно.

В данной работе будет установлено допустимое число нулей собственных значений $\lambda_{1,2}^{(g)}$ при заданном волновом числе k в различных случаях и тем самым определено допустимое число корней дисперсионного уравнения (1), т.е. допустимое число PPP, поскольку $\det \hat{\mathbf{Z}}_{st}^{(g)} = \lambda_1^{(g)} \lambda_2^{(g)}$. Далее будем ссылаться на [10] как на часть I, соответственно, ссылка на выражение (n) части I будет обозначаться ($I.n$), ссылка на рис. n — рис. $I.n$.

В основном разбираются варианты, в которых число PPP максимально. В ряде случаев получается, что абсолютный максимум числа PPP может достигаться, когда импедансы СР описываются кривой 2 на рис. I.3б и I.3в. В части I отмечалось, что такие частотные зависимости реализуются при выполнении некоторого дополнительного условия на характеристики СР, а также на значения k и ω , в то время как зависимости, показанные на рис. I.3а, не связаны с дополнительными условиями. Принимая во внимание это обстоятельство, в работе обсуждаются случаи, когда $Z_A^{(g)}$ и $Z_B^{(g)}$ описываются кривыми, изображенными не только на рис. I.3б, I.3в, но и на рис. I.3а.

С помощью частотных зависимостей импедансов и свойств собственных значений матриц $\hat{Z}_{st}^{(g)}$ удастся установить максимально допустимое число ППП, и оно не зависит от конкретных характеристик СР и пленки металла. Вместе с тем следует иметь в виду, что число ППП, существующих в заданной зоне конкретной структуры, определяется в итоге выполнением неравенств (I.76)–(I.78) и (I.81). Естественно, это число не может превышать допустимого максимума при заданном типе частотной зависимости импедансов $Z_A^{(g)}$ и $Z_B^{(g)}$.

В части I упоминалось, что диссипация в металле достаточно мала в частотном интервале, ограниченном некоторыми частотами ω_{a1} и $\omega_{a2} > \omega_{a1}$, так что, решая определенные задачи, в этом интервале ее можно не учитывать. Частоты ω_{a1} и ω_{a2} могут попасть в запрещенную зону СР, тогда ω_{a1} и ω_{a2} станут нижней и верхней границей зоны. Например, пренебрежение поглощением означает, что нижняя запрещенная зона должна быть ограничена снизу частотой ω_{a1} , а не $\omega_l^{(g)} = 0$. Тем не менее будем ссылаться на рис. I.2–I.4 в предположении, что при $\omega \rightarrow \omega_{a1, a2}$ поведение импедансов СР такое же, как и при $\omega \rightarrow \omega_{l, u}^{(g)}$. Допустимое максимальное число ППП не увеличится, поскольку в части интервала $\omega_l^{(g)} < \omega < \omega_u^{(g)}$ оно не больше, чем во всем интервале.

По ходу рассмотрения различных вариантов комбинаций сред, окружающих пленку, речь будет идти о числе нулей собственных значений матриц $\hat{Z}_{st}^{(g)}$, а итоги подводятся в таблицах, где результаты уже указываются как число ППП.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНЫ В СТРУКТУРЕ СР–ПЛЕНКА МЕТАЛЛА–ОДНОРОДНАЯ СРЕДА

Вариант A1. Асимметричный период. В этом случае $Z_1 = Z_h^{(g)}$ и $Z_2 = Z_B^{(g)}$, ППП могут существовать при $\omega < \Omega_{\text{lim}}^{(g)}$, где $\Omega_{\text{lim}}^{(g)}$ задается выражениями (I.18); предполагаем, что запрещенные зоны попадают в этот интервал.

TE-поляризация. Учитывая (I.64)–(I.81), заключаем, что только одно из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ матрицы $\hat{Z}_{st}^{(TE)}$ может 1 раз обратиться в ноль в нижней запрещенной зоне. Для обращения собственного значения в ноль необходимо, чтобы функция $Z_B^{(TE)}(\omega)$ описывалась кривой 2 на рис. I.2, так как, согласно (I.79), только в этом случае одно из собственных значений может быть отрицательным при $\omega \rightarrow \omega_u^{(TE)}$.

В верхней запрещенной зоне каждое из собственных значений может 1 раз обратиться в ноль, если функция $Z_B^{(TE)}(\omega)$ описывается кривой 2 на рис. I.3в. Ввиду (I.70) одно собственное значение не может обращаться в ноль дважды, поскольку

в противном случае кривые, представляющие $\lambda_1^{(TE)}(\omega)$ и $\lambda_2^{(TE)}(\omega)$, обязательно пересекутся.

Однако только одно из собственных значений может пройти через ноль, когда $Z_B^{(TE)}(\omega)$ описывается любой из кривых на рис. I.3а.

TM-поляризация. В нижней запрещенной зоне оба собственных значения $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ матрицы $\hat{Z}_{st}^{(TM)}$ могут пройти через ноль 1 раз при любой из показанных на рис. I.2 частотных зависимостей $Z_B^{(TM)}(\omega)$. В случае, описываемом кривой 1, должны выполняться неравенства (I.76)–(I.78), а в другом случае достаточно, чтобы выполнялись неравенства (I.76) и (I.78) при $\omega \rightarrow \omega_u^{(TE)} = 0$.

В соответствии с (I.60) и (I.61) в верхней запрещенной зоне $\lambda_1^{(TM)}$ может обратиться в ноль дважды, а $\lambda_2^{(TM)}$ – 1 раз (рис. 1), если $Z_B^{(TM)}(\omega)$ описывается кривой 2 на рис. I.3б. Ввиду (I.21) и (I.74) только при таком условии $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут быть положительными в окрестности $\omega_l^{(TM)}$.

Если $Z_B^{(TM)}(\omega)$ описывается кривой 2 на рис. I.3а, то $\lambda_1^{(TM)}$ и $\lambda_2^{(TM)}$ могут по одному разу обратиться в ноль. Обращение в ноль $\lambda_1^{(TM)}$ 2 раза исключается, поскольку согласно (I.80) только одно собственное значение может быть больше нуля в окрестности $\omega_l^{(TM)}$, поэтому ввиду (I.70) $\lambda_1^{(TM)} < 0$ в интервале $\omega_l^{(TM)} < \omega < \omega_p^{(TM)}$.

Оба собственных значения тоже могут обратиться в ноль по одному разу, когда $Z_B^{(TM)}(\omega)$ описывается кривой 1 на рис. I.3а.

Вариант A2. Симметричный период. Пусть период СР симметричен. Например, период полубесконечной СР, образованной двумя чередующимися слоями, окажется симметричным, если толщина внешнего слоя равна половине толщины внутренних слоев того же материала.

TE-поляризация. Учитывая частотную зависимость $Z_2 = Z_s^{(g)}$ (кривая 1 на рис. I.4), а также (I.21), (I.71), (I.74) и (I.79), заключаем, что в нижней запрещенной зоне ни одно из собственных

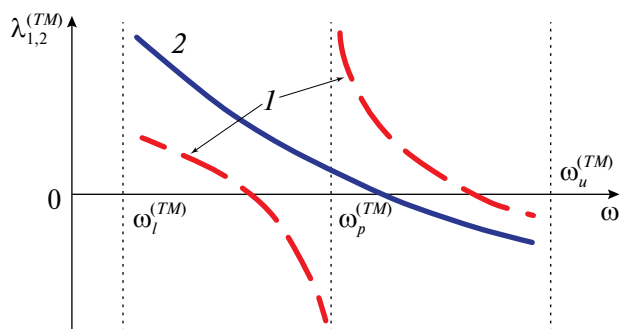


Рис. 1. Возможное поведение собственных значений $\lambda_1^{(TM)}$ (кривая 1) и $\lambda_2^{(TM)}$ (кривая 2) как функций частоты в верхней запрещенной зоне.

Таблица 1. Максимальное число ППП при заданном k в структуре СР—пленка металла—однородная среда

Поляризация	TE		TM	
Вариант	A1	A2	A1	A2
L	1	0	2	1
U_{BC}	2	1	3	2
U_A	1		2	

Примечание. В строках L , U_{BC} и U_A указано число ППП для нижней запрещенной зоны (L) и верхней запрещенной зоны (U_{BC} , U_A) соответственно. Строки U_{BC} и U_A относятся к случаям, когда импеданс СР с асимметричным периодом описывается кривыми на рис. 1.3б, 1.3в и 1.3а соответственно. Число ППП в СР с симметричным периодом для верхней запрещенной зоны указано в строке U_{BC} .

значений $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ не обращается в ноль, и $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ не обращаются в ноль в верхней запрещенной зоне, если частотная зависимость $Z_s^{(g)}$ описывается кривой 1. Одно из собственных значений обязательно обращается в ноль 1 раз в верхней запрещенной зоне, если частотная зависимость $Z_s^{(g)}$ описывается кривой 2 на рис. 1.4, так как $Z_s^{(g)} \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow \omega_u^{TE} - 0$.

TM-поляризация. Каждое из двух собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ может 1 раз обратиться в ноль в любой из запрещенных зон, причем в верхней запрещенной зоне зависимость $Z_s^{(TM)}(\omega)$ должна описываться кривой 1 на рис. 1.4, поскольку согласно (1.75) только в этом случае неравенства (1.76)–(1.78) могут выполняться, и поэтому $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ будут положительными при $\omega \rightarrow \omega_l^{TM} + 0$ и отрицательными при $\omega \rightarrow \omega_u^{TM} - 0$.

Напомним, что число нулей собственных значений $\lambda_{1,2}^{(g)}$ равно числу ППП соответствующей поляризации. Допустимые максимумы числа ППП в случаях, обсуждавшихся в данном параграфе, указаны в табл. 1.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОНЫ В СТРУКТУРАХ СР—ПЛЕНКА МЕТАЛЛА—СР

Присвоим номера 1 и 2 СР, находящимся сверху и снизу пленки соответственно. Края запрещенных зон СР обозначим $\omega_{l,J}^{(g)}$ и $\omega_{u,J}^{(g)}$, $J = 1, 2$. В общем случае запрещенные зоны СР не совпадают, поэтому ППП может возникать в пределах пересечений запрещенных зон, т.е. в интервалах $\omega_l^{(g)} < \omega < \omega_u^{(g)}$, где $\omega_l^{(g)} = \max(\omega_{l,1}^{(g)}, \omega_{l,2}^{(g)})$ и $\omega_u^{(g)} = \min(\omega_{u,1}^{(g)}, \omega_{u,2}^{(g)})$. Учитывая это, используем характеристики “нижняя” по отношению к пересечению нижних запрещенных зон СР и “верхняя” по отношению к пересечению пары верхних зон. Пересечение нижней зоны одной СР с верхней зоной другой СР будем называть смешанной запрещенной зоной.

Предположим, что импедансы СР ведут себя в пределах пересечения $\omega_l^{(g)} < \omega < \omega_u^{(g)}$ двух зон так,

как если бы этот интервал совпадал с запрещенной зоной каждой из СР, поэтому будем ссылаться на рис. 1.2–1.4.

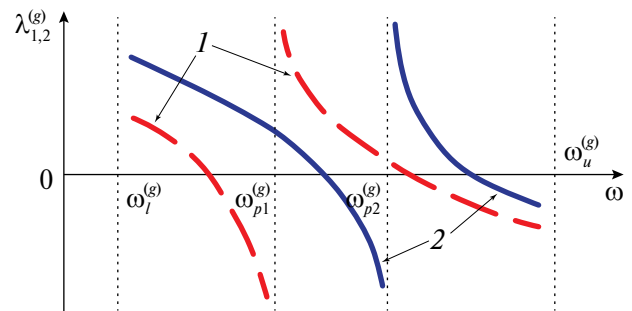
Впрочем, можно сделать так, чтобы СР имели одинаковый спектр блоховских электромагнитных волн, и тогда их запрещенные зоны совпадают. Представим себе две одинаковые бесконечные СР X и Y . Рассечем СР X по плоскости внутри слоя одного материала, а СР Y по плоскости внутри слоя другого материала. В качестве СР1 и СР2 выбираем, например, верхнюю часть СР X и нижнюю часть СР Y соответственно. Запрещенные зоны СР1 и СР2 совпадают, а импедансы будут разными, за исключением специальных случаев.

Вариант В1. Асимметричный период. Если периоды обеих СР асимметричны, то $Z_1 = Z_{A,1}^{(g)}$ и $Z_2 = Z_{B,2}^{(g)}$ в выражении $\hat{Z}_{st}^{(g)}$ (1.57), где $Z_{A,1}^{(g)}$ и $Z_{B,2}^{(g)}$ — импедансы $Z_A^{(g)}$ и $Z_B^{(g)}$ (1.32) и (1.33), относящиеся к СР1 и СР2 соответственно.

TE-поляризация. В нижней запрещенной зоне каждое из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ может 1 раз обратиться в ноль. Для этого необходимо, чтобы $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описывались кривой 2 на рис. 1.2.

Если $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ в верхней запрещенной зоне описываются кривой 2 на рис. 1.3в, т.е. $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ имеют полюсы и отрицательны в окрестности $\omega_u^{(TE)}$, то оба собственных значения могут дважды обратиться в ноль (рис. 2).

Собственные значения $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ могут обратиться в ноль только по одному разу, когда $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описываются кривыми на рис. 1.3а. Если оба импеданса описываются кривой 2, то $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ проходят через ноль до точек $\omega_{p1,p2}^{(TE)}$, а затем $\lambda_1^{(TE)} > 0$ и $\lambda_2^{(TE)} > 0$ при $\omega > \omega_{p1}^{(TE)}$ и $\omega > \omega_{p2}^{(TE)}$ соответственно. Если один из импедансов описывается кривой 2, а другой — кривой 1, то $\lambda_1^{(TE)}$, имеющее полюс согласно (1.60), обращается в ноль при $\omega < \omega_p^{(TE)}$, и $\lambda_1^{(TE)} > 0$ при $\omega > \omega_p^{(TE)}$. Ввиду (1.79) монотонно убывающее $\lambda_2^{(TE)}$ может пройти через ноль в интервале $\omega > \omega_p^{(TE)}$ (рис. 3).

**Рис. 2.** Четыре нуля собственных значений $\lambda_1^{(g)}$ (кривая 1) и $\lambda_2^{(g)}$ (кривая 2), $g = TE, TM$.

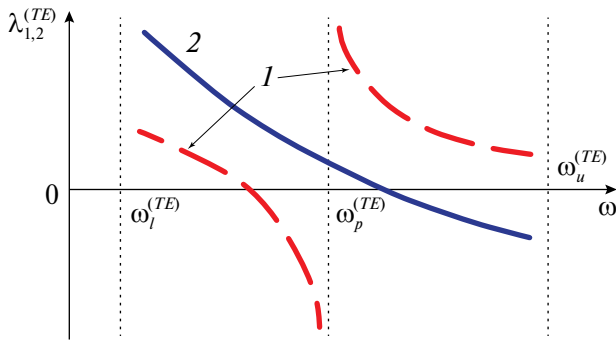


Рис. 3. Возможные частотные зависимости $\lambda_1^{(TE)}$ (кривая 1) и $\lambda_2^{(TE)}$ (кривая 2) в верхней запрещенной зоне.

Если частотная зависимость $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описывается кривыми на рис. 1.3б, то $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ обязательно пройдут через ноль по одному разу независимо от параметров пленки, поскольку в силу (I.53) и (I.68) оба собственных значения больше нуля при $\omega \rightarrow \omega_l^{(g)} + 0$ и оба имеют полюс. Это означает, что в данном случае независимо от параметров пленки обязательно существуют два TE -ППП.

В смешанной запрещенной зоне, возникающей, например, из-за перекрытия верхней запрещенной зоны $CP1$ с нижней запрещенной зоной $CP2$, $\lambda_1^{(TE)}$ может обратиться в ноль дважды, при этом $\lambda_2^{(TE)}$ может обращаться в ноль 1 раз, когда функции $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описываются кривыми 2 на рис. 1.3в и 1.2 соответственно. Частотная зависимость $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ аналогична зависимости $\lambda_{1,2}^{(TM)}$, показанной на рис. 1.

Если $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описывается любой из кривых на рис. 1.3а, то $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ могут обратиться в ноль по одному разу при условии, что зависимость $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ описывается кривой 2 на рис. 1.2.

TM-поляризация. В нижней запрещенной зоне каждое из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ может 1 раз обратиться в ноль независимо от поведения $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$. Если частотные зависимости $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ описываются кривыми 2 на рис. 1.2, то $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ обязательно станут отрицательными при приближении частоты к верхней границе зоны, поэтому оба собственных значения пройдут через ноль, если на реальной границе нижней зоны ω_{a1} выполняются неравенства (I.76) и (I.78). (Напомним, что ω_{a1} — частота, выше которой можно не учитывать поглощение волн в металле. Если пренебречь поглощением вплоть до нулевой частоты, то можно было бы утверждать, что $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ обязательно проходят через ноль, т.е. независимо от параметров пленки существовало бы два TM -ППП.)

В верхней запрещенной зоне как $\lambda_1^{(TM)}$, так и $\lambda_2^{(TM)}$ могут дважды обратиться в ноль (рис. 2). Ввиду (I.69), (I.70) и (I.74) это может быть, если оба

$Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ имеют полюсы и положительные в окрестности $\omega_l^{(TM)}$ (кривая 2 на рис. 1.3б).

Собственные значения могут обращаться в ноль только по одному разу, если частотная зависимость импедансов описывается кривыми на рис. 1.3а, для этого необходимо, чтобы хотя бы один из импедансов имел полюс. Собственные значения, имеющие полюс, обращаются в ноль правее полюса и отрицательны левее полюса. Непрерывное собственное значение может обращаться в ноль.

В то же время, если поведение $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ описывается кривой 2 на рис. 1.3в, то каждое собственное значение обязательно обращается в ноль 1 раз. Согласно (I.75) оба собственных значения будут отрицательными при $\omega \rightarrow \omega_l^{(TM)} + 0$ и $\omega \rightarrow \omega_u^{(TM)} - 0$, поэтому они должны проходить через ноль правее точки полюса. Следовательно, независимо от параметров пленки два TM -ППП обязательно существуют при указанной частотной зависимости импедансов CP .

В смешанной запрещенной зоне, возникающей из-за перекрытия верхней запрещенной зоны $CP1$ с нижней запрещенной зоной $CP2$, $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут обратиться в ноль по одному разу, если $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ описывается любой из кривых на рис. 1.3а. Но при этом импеданс $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ должен описываться кривой 1 на рис. 1.2. Вместе с тем, если поведение $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ описывается соответственно кривой 1 на рис. 1.2 и кривой 2 на рис. 1.3б, то $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут трижды обратиться в ноль. Согласно (I.56) в этом случае $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут быть положительными в окрестности $\omega_l^{(TM)}$ и тогда они могут зависеть от частоты так, как показано на рис. 1.

Вариант В2. Симметричный период. Если периоды обеих CP симметричны, то $Z_{A,1}^{(g)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(g)}(\omega)$ в $\hat{Z}_{st}^{(g)}$ заменяются импедансами $Z_{s,1}^{(g)}(\omega)$ и $Z_{s,2}^{(g)}(\omega)$ (I.42).

TE-поляризация. Из рис. 1.4 (кривая 1) заключаем, что ни одно из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ не может обратиться в ноль в нижней запрещенной зоне. Оба собственных значения могут 1 раз обратиться в ноль в верхней запрещенной зоне при условии, что функции $Z_{s,1}^{(TE)}(\omega)$ и $Z_{s,2}^{(TE)}(\omega)$ описываются кривой 2 на рис. 1.4.

В смешанной запрещенной зоне только одно собственное значение может 1 раз обратиться в ноль, так как только один из импедансов может описываться кривой 2 на рис. 1.4.

TM-поляризация. Оба собственных значения $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут по одному разу обратиться в ноль в нижней и верхней запрещенных зонах. В верхней зоне $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ должны описываться кривой 1 на рис. 1.4, так как только в этом случае $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут быть положительными у нижней границы зоны. В смешанной зоне может обращаться в ноль только одно собственное значение.

Вариант В3. Симметричный и асимметричный периоды. Предположим, что период $CP1$ симметричен, а период $CP2$ асимметричен. В этом случае импеданс $Z_{B,2}^{(g)}$ входит в $\hat{Z}_{st}^{(g)}$ вместо $Z_{s,2}^{(g)}$.

TE -поляризация. В нижней запрещенной зоне только одно из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ может 1 раз обратиться в ноль, для этого необходимо, чтобы $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описывалась кривой 2 на рис. 1.2. В противном случае ни одно из собственных значений не обращается в ноль.

Максимальное число нулей $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ в верхней запрещенной зоне равно трем, поскольку $\lambda_1^{(TE)}$ может обращаться в ноль дважды, а $\lambda_2^{(TE)}$ — 1 раз (рис. 1). Такой случай может возникнуть при условии, что поведение $Z_{s,1}^{(TE)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описывается кривыми 2 на рис. 1.4 и 1.3в соответственно. Между тем при той же зависимости $Z_{s,1}^{(TE)}(\omega)$ собственные значения могут обратиться в ноль только по одному разу, если $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описывается любой из кривых на рис. 1.3а.

Ситуация в смешанной запрещенной зоне зависит от того, как эта зона формируется. Пусть смешанная зона появляется в результате перекрытия нижней запрещенной зоны $CP1$, имеющей симметричный период, и верхней запрещенной зоны $CP2$, имеющей асимметричный период. В этом случае $\lambda_1^{(TE)}$ может дважды обратиться в ноль, если функция $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описывается кривой 2 на рис. 1.3в. Если $\lambda_1^{(TE)}$ проходит через ноль только в интервале $\omega < \omega_p^{(TE)}$, то $\lambda_2^{(TE)}$ может обращаться в ноль при $\omega > \omega_p^{(TE)}$.

Если функция $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ описывается любой кривой на рис. 1.3а, то согласно (1.79) одно из собственных значений может обращаться в ноль только 1 раз, так как в данном случае импеданс $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ становится отрицательным только в одном интервале частот, а не в двух.

Предположим теперь, что верхняя запрещенная зона $CP1$ попадает в нижнюю запрещенную зону $CP2$. В этом варианте каждое из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ может 1 раз обратиться в ноль. Для этого необходимо, чтобы поведение $Z_{s,1}^{(TE)}(\omega)$ описывалось кривой 2 на рис. 1.4, а $Z_{B,2}^{(TE)}(\omega)$ — кривой 2 на рис. 1.2.

TM -поляризация. Каждое из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ может 1 раз обратиться в ноль в нижней запрещенной зоне.

В верхней запрещенной зоне $\lambda_1^{(TM)}$ может обращаться в ноль дважды, а $\lambda_2^{(TM)}$ — 1 раз (рис. 1). С учетом (1.67) и (1.74) необходимо, чтобы $Z_{s,1}^{(TM)}(\omega)$ и $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ описывались соответственно кривой 1 на рис. 1.4 и кривой 2 на рис. 1.3б, поскольку только в этом случае $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут быть положительными в окрестности $\omega_i^{(TM)}$.

Таблица 2. Максимальное число ППП в структуре CP —пленка металла— CP

Поляризация	TE			TM		
Вариант	$B1$	$B2$	$B3$	$B1$	$B2$	$B3$
L	1	0	1	2	2	1
U_{BC}	4	2	3	4	2	3
M_{BC}	3	1	2	3	1	2 или 3
U_A	2		2	2		2
M_A	2		1	2		2

Примечание. В строках L , U_{BC} , U_A и M_{BC} , M_A указано число ППП для нижней запрещенной зоны (L), верхней запрещенной зоны (U_{BC} , U_A) и смешанной запрещенной зоны (M_{BC} , M_A). Строки U_{BC} , M_{BC} и U_A , M_A относятся к случаям, когда импедансы CP с асимметричным периодом описываются кривыми на рис. 1.3б, 1.3в и 1.3а соответственно. Число ППП в CP с симметричным периодом для верхней и смешанной запрещенных зон указано в строках U_{BC} и M_{BC} .

Если $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ описывается любой кривой на рис. 1.3а, то собственные значения могут обратиться в ноль только по одному разу. Такой случай может реализоваться при условии, что $Z_{s,1}^{(TM)}(\omega)$ описывается кривой 1 на рис. 1.4.

Пусть смешанная зона появляется в результате перекрытия нижней запрещенной зоны $CP1$, имеющей симметричный период, и верхней запрещенной зоны $CP2$, имеющей асимметричный период. Если функция $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ описывается кривой 2 на рис. 1.3б, то собственные значения $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут обращаться в ноль трижды. Одно собственное значение может обращаться в ноль дважды, а другое — 1 раз. Однако $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут обращаться в ноль только по одному разу, когда $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ описывается любой кривой на рис. 1.3а.

Если верхняя запрещенная зона $CP1$ попадает в нижнюю запрещенную зону $CP2$, то $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут обратиться в ноль по одному разу, если $Z_{s,1}^{(TM)}(\omega)$ описывается кривой 1 на рис. 1.4, а $Z_{B,2}^{(TM)}(\omega)$ — кривой 1 на рис. 1.2.

В табл. 2 приводится максимальное число ППП для рассмотренных случаев, полученное из результатов анализа числа нулей $\lambda_{1,2}^{(TM)}$.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Вариант С1. Взаимодополняющие решетки. Предположим, что металлическая пленка находится между взаимодополняющими CP (рис. 1.1). Соответственно, $Z_1 = Z_A^{(g)}$ и $Z_2 = Z_B^{(g)}$, причем $Z_A^{(g)}$ и $Z_B^{(g)}$ однозначно связаны друг с другом согласно (1.32) и (1.33), а также рис. 1.2 и 1.3.

TE -поляризация. В силу свойств собственных значений $\lambda_{1,2}^{(g)}$ из рис. 1.2 и 1.3 следует, что только одно из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ может обращаться в ноль в нижней запрещенной зоне, и

каждое из собственных значений может 1 раз обратиться в ноль в верхней запрещенной зоне.

TM-поляризация. Собственные значения $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут по одному разу обратиться в ноль в нижней запрещенной зоне. Принимая во внимание тот факт, что согласно (I.60) и (I.61) в верхней запрещенной зоне $\lambda_1^{(TM)}$ имеет полюс и ввиду (I.80) только одно из собственных значений может быть положительным, заключаем, что в этой зоне каждое из собственных значений может 1 раз обратиться в ноль.

Вариант С2. Одинаковые СР с симметричным периодом. Пусть СР1 и СР2 имеют симметричный период и одинаковы. В этом случае $Z_1 = Z_2 = Z_s^{(g)}$.

TE-поляризация. Из рис. I.4 делаем вывод, что $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ не могут обращаться в ноль в нижней запрещенной зоне, но каждое из них может 1 раз обратиться в ноль в верхней запрещенной зоне, если $Z_s^{(TE)}(\omega)$ меняется с частотой согласно кривой 2 на рис. I.4.

Оба $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ обязательно пройдут через ноль, т.е. обязательно будут существовать два ТЕ-ППП, если толщина пленки больше некоторого значения. Это следует из того, что на границе полубесконечный металл—СР с симметричным периодом обязательно существует один ТЕ-ППП при такой частотной зависимости $Z_s^{(TE)}$ [8]. При уменьшении толщины пленки останется один ТЕ-ППП, переходящий в отсутствие пленки в объемную блоховскую волну при $\omega = \omega_l^{(g)}$, причем эта волна удовлетворяет граничным условиям в структуре СР—пленка—СР, поскольку $Z_s^{(TE)}(\omega_l^{(g)}) = 0$ (рис. I.4).

TM-поляризация. Каждое из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ может 1 раз обратиться в ноль в нижней запрещенной зоне. То же самое может произойти и в верхней запрещенной зоне, если частотная зависимость $Z_s^{(TM)}$ описывается кривой 1 на рис. I.4. Как и в случае ТЕ-поляризации, по той же причине оба $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ обязательно обращаются в ноль, когда пленка достаточно толстая, а при меньших толщинах одно собственное значение обращается в ноль.

Если частотная зависимость $Z_s^{(TM)}$ описывается кривой 2, то ни одно из собственных значений не обращается в ноль.

Вариант С3. СР с одинаковыми импедансами. Предположим, что СР1 и СР2 имеют асимметричные периоды, состоящие из одних и тех же слоев. Порядок слоев тоже одинаковый, если его определять, отсчитывая слои вверх в СР1 и вниз в СР2. В этом случае трансфер-матрицы $\widehat{\mathbf{M}}_1^{(g)}$ и $\widehat{\mathbf{M}}_2^{(g)}$ СР1 и СР2 оказываются взаимно комплексно сопряженными, $\widehat{\mathbf{M}}_1^{(g)} = \widehat{\mathbf{M}}_2^{(g)*}$, где $\widehat{\mathbf{M}}^{(g)}$ задается формулой (I.26), а $\widehat{\mathbf{M}}_2^{(g)} = \widehat{\mathbf{M}}_1^{(g)*}$. Следовательно, $\widehat{\mathbf{M}}_2^{(g')} = \widehat{\mathbf{M}}_1^{(g)*}$, где матрица $\widehat{\mathbf{M}}_2^{(g')}$ является аналогом

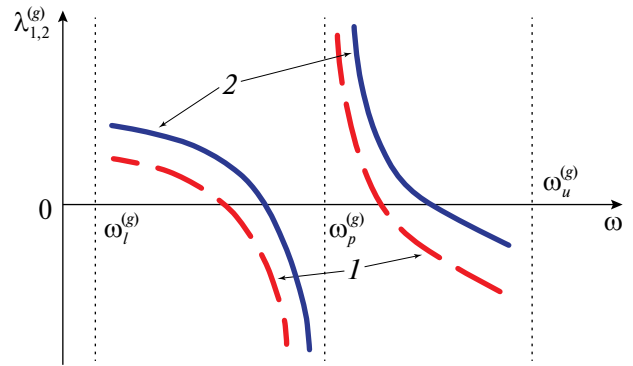


Рис. 4. Четыре нуля собственных значений $\lambda_1^{(g)}$ (кривая 1) и $\lambda_2^{(g)}$ (кривая 2), $g = TE, TM$, в варианте С3.

матрицы $\widehat{\mathbf{M}}^{(g)}$ (I.29) для СР2. Из (I.32) и (I.33) следует, что $Z_{B,2}^{(g)} = Z_{A,1}^{(g)}$, поэтому $Z_1 = Z_2 = Z_{A,1}^{(g)}$ в матрице $\widehat{\mathbf{Z}}_{st}^{(g)}$ (I.57), тогда

$$\lambda_{1,2}^{(g)} = Z_{A,1}^{(g)} + \frac{1}{2}(\text{Tr} \widehat{\mathbf{Z}}_f^{(g)} \mp \sqrt{D}), \quad (1)$$

где

$$D = (Z_{f,11}^{(g)} - Z_{f,22}^{(g)})^2 + 4Z_{f,12}^{(g)2}. \quad (2)$$

TE-поляризация. Принимая во внимание (I.66), (I.70)–(I.72) и (I.82), приходим к выводу, что каждое из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ может 1 раз обратиться в ноль в нижней запрещенной зоне, если $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ описывается кривой 2 на рис. I.2.

Каждое из собственных значений может дважды обратиться в ноль в верхней запрещенной зоне (рис. 4). Для появления четырех нулей необходимо, чтобы $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ описывалась кривой 2 на рис. I.3в.

Если $Z_{A,1}^{(TE)}(\omega)$ описывается любой кривой на рис. I.3а, то будет не более двух нулей, поскольку $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ могут обращаться в ноль по одному разу. При наличии полюса $\lambda_{1,2}^{(TE)}$ могут обращаться в ноль при $\omega < \omega_p^{(TE)}$ (рис. 4).

TM-поляризация. Каждое из собственных значений $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ может 1 раз обратиться в ноль в нижней запрещенной зоне, причем $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ может описываться любой из кривых на рис. I.2.

Оба собственных значения могут дважды обращаться в ноль в верхней запрещенной зоне (рис. 4). Необходимое условие – зависимость $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ должна описываться кривой 2 на рис. I.3б.

Если $Z_{A,1}^{(TM)}(\omega)$ описывается любой кривой на рис. I.3а, то $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ могут обращаться в ноль не более чем по одному разу. При наличии полюса $\lambda_{1,2}^{(TM)}$ проходят через ноль в интервале $\omega > \omega_p^{(TM)}$ (рис. 4).

Как упоминалось выше, максимально допустимое число нулей собственных значений $\lambda_{1,2}^{(g)}$

Таблица 3. Максимальное число ППП в структурах СР—пленка металла—СР отдельных типов

Поляризация	TE			TM		
Вариант	$C1$	$C2$	$C3$	$C1$	$C2$	$C3$
L	1	0	2	2	2	2
U_{BC}	2	2	4	2	2	4
U_A	2		2	2		2

Примечание. В строках L , U_{BC} и U_A указано число ППП для нижней запрещенной зоны (L) и верхней запрещенной зоны (U_{BC} , U_A). Строки U_{BC} и U_A относятся к случаям, когда импедансы СР с асимметричным периодом описываются кривыми на рис. 1.3б, 1.3в и 1.3а соответственно. Число ППП в СР с симметричным периодом для верхней запрещенной зоны указано в строке U_{BC} .

есть максимальное число TE -ППП и TM -ППП (табл. 3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено максимально допустимое число TE - и TM -поляризованных ППП в металлической пленке, находящейся между полубесконечной периодической СР и полубесконечным однородным диэлектриком, а также между двумя периодически СР. Рассматривались только ППП, не затухающие за счет излучения во внешнюю среду. Соответственно, интерес представляли запрещенные зоны СР. Кроме того, предполагалось, что запрещенные зоны попадают в частотный интервал, в пределах которого нет объемных волн в однородной среде. Результаты получены путем комбинирования возможной частотной зависимости импедансов полубесконечных диэлектриков и металлической пленки с учетом ограничений на частотную зависимость собственных значений матрицы, определяющей дисперсионное уравнение.

Допустимые максимальные числа ППП приведены в табл. 1–3. Максимальное число ППП зависит от типа структуры, от того, как расположены слои в пределах периода, а именно в произвольном порядке или симметрично относительно середины периода. Максимальное число ППП также зависит от поляризации. Разница в числе TE - и TM -ППП возникает из-за того, что TE -импеданс пленки является положительно определенной матрицей вследствие положительности магнитной проницаемости, а TM -импеданс — отрицательно определенной матрицей из-за отрицательной диэлектрической проницаемости металла.

Импедансы СР ведут себя как функции частоты по-разному в нижней запрещенной зоне и в верхних запрещенных зонах, поэтому максимальное число ППП может быть разным в разных типах запрещенных зон. В некоторых случаях помимо нижней и верхней запрещенных зон появляется запрещенная зона, названная смешанной. В этой

зоне допустимое максимальное число ППП может отличаться от их числа в нижней и верхней запрещенных зонах.

Абсолютные максимумы числа ППП в верхней и смешанной зонах, приведенные в табл. 1–3, достигаются для ряда вариантов, когда импедансы СР описываются кривыми, показанными на рис. 1.3б, 1.3в. Такие частотные зависимости могут возникать только при выполнении определенного условия на волновое число и частоту, поэтому результаты применительно к частотным зависимостям импедансов, описываемых кривыми на рис. 1.3а, указываются в отдельной строке таблиц.

Можно считать, что допустимое максимальное число ППП не зависит от материальных констант диэлектриков и металла, от толщины слоев и их числа в пределах периода СР, от того, является ли пленка однородной или неоднородной, так как типы частотной зависимости импедансов не зависят напрямую от указанных характеристик. В частности, найдя частотную зависимость импедансов СР, можно предсказать допустимое максимальное число ППП, причем оно не будет зависеть от параметров пленки.

Разумеется, число ППП, существующих в конкретной структуре, зависит от параметров структуры, поскольку возможное число нулей собственных значений импеданса структуры $\hat{Z}_{st}^{(g)}$ в итоге определяется неравенствами (I.76)–(I.78) и (I.81), выполнение которых накладывает ряд условий на материальные константы и параметры структуры.

Выше отмечалось, что одновременное выполнение неравенств (I.76) и (I.77) вряд ли достижимо на практике. В связи с этим можно предположить, что наиболее вероятным будет существование максимум двух ППП, поскольку анализ возможных комбинаций частотных зависимостей импедансов показывает, что для появления двух волн во многих случаях требуется выполнение только одного из неравенств (I.76) и (I.77) либо эти неравенства всегда выполняются вследствие особенностей частотной зависимости импедансов.

Впрочем, в части III приводятся примеры, когда при подходящей диэлектрической и магнитной проницаемости три и четыре ППП все-таки возникают.

Допустимое максимальное число ППП найдено без учета затухания. Влияние диссипации на число ППП будет рассматриваться на конкретных примерах в части III. Здесь лишь отметим, что слабое затухание не может увеличить число ППП, тем более что сдвиг частоты будет пропорционален квадрату мнимой части диэлектрической проницаемости, так как все импедансы являются действительными величинами при отсутствии диссипации.

Установить максимальное число ППП в общем виде при заметной диссипации вряд ли возможно. Прежде всего при наличии диссипации импедансы пленки становятся неэрмитовыми матрицами, а TE - и TM -импедансы СР и однородной среды — комплексными числами, поэтому развитый в работе подход к проблеме не годится. Кроме того, при сильном поглощении электромагнитных волн в СР расплываются границы зон, и амплитуда волн будет меняться с расстоянием от границы полубесконечной среды во всем диапазоне частот.

Если поглощение в диэлектрических средах слабое, то основную роль играет поглощение в пленке, хотя и оно может быть достаточно слабым. При этом затухание ППП уменьшается вблизи края зоны, поскольку глубина проникновения поля в СР растет, соответственно, доля энергии волны, содержащаяся в пленке, падает. Отметим, что возможность снижения затухания ППП на границе металл—однородный диэлектрик за счет увеличения глубины проникновения ППП в диэлектрик анализировалась в [11].

Автор выражает благодарность В.И. Альшицу за полезные обсуждения результатов и ценные замечания.

Работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ “Курчатовский институт”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Raether H.* Surface-Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings. Berlin, Heidelberg: Springer, 1988. 117 p.
2. *Майер С.А.* Плазмоника. Теория и приложения. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. 226 с.
3. *Plasmonic Nanoguides and Circuits / Ed. Bozhevolnyi S.I.* Singapore: Pan Stanford Publishing Pte. Ltd, 2009. 441 p.
4. *Metamaterials and Plasmonics: Fundamentals, Modelling, Applications / Eds. Zouhdi S. et al.* Springer Science + Business Media B.V., 2009. 305 p.
5. *Климов В.В.* Наноплазмоника. М.: Наука, 2010. 480 с.
6. *Polo J., Mackay T., Lakhtakia A.* Electromagnetic Surface Waves: A Modern Perspective. Amsterdam: Elsevier, 2013. 293 p.
7. *Moradi A.* Canonical Problems in the Theory of Plasmonics. Springer Nature Switzerland AG, 2020. 349 p.
8. *Darinskii A.N., Shuvalov A.L.* // *Phys. Rev. A.* 2020. V. 102. P. 033515.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.033515>
9. *Darinskii A.N.* // *Phys. Rev. A.* 2021. V. 104. P. 023507.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.023507>
10. *Даринский А.Н.* // Кристаллография. 2024. Т. 69. № 6. С. 1018.
<https://doi.org/10.31857/S0023476124060123>
11. *Альшиц В.И., Любимов В.Н.* // Письма в ЖЭТФ. 2020. Т. 112. С. 127.
<https://doi.org/10.1134/S0021364020140064>

PLASMON POLARITONS OF THE TE AND TM TYPES IN A METAL FILM BORDERING A SUPERLATTICE II. ANALYSIS OF THE EXISTENCE OF PLASMON POLARITONS

A.N. Darinskii*

*Shubnikov Institute of Crystallography of Kurchatov Complex of Crystallography and Photonics
of NRC “Kurchatov Institute Moscow 119333, Russia*

**e-mail: Alexandre_Dar@mail.ru*

Abstract. The maximum number of TE and TM polarised surface plasmon polaritons in the forbidden zone of the Bloch spectrum of electromagnetic waves in a periodic superlattice is established in structures containing a metal film between a homogeneous medium and a periodic superlattice or between two superlattices. It is demonstrated that the determining factor in the maximum number of such waves is the type of frequency dependence of the superlattice impedance. Moreover, the maximum number of surface plasmon polaritons is contingent upon the structural type and polarization of the wave.